

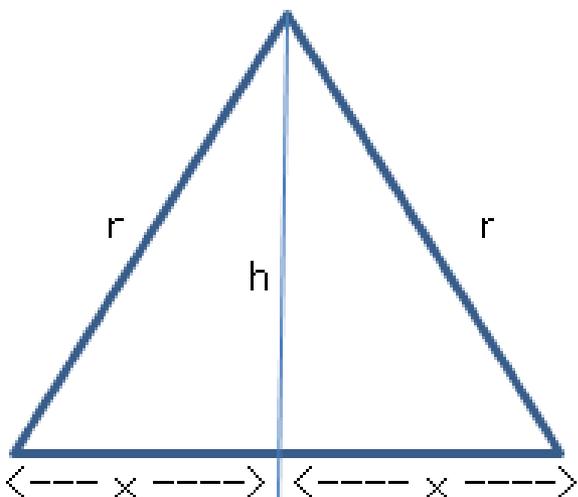
ビジネス微分積分のひとくちメモ

『長さLのひもで作る図形の面積』



長さLのひもで作る図形の面積で最大となる図形は？ 三角形、長方形はどのタイプ？ 円との比較は？

1. 三角形の場合：正三角形が面積最大、 $S = \frac{L^2}{12\sqrt{3}}$



ひもの長さをLとすれば、

$$r + r + 2x = L$$

$$r = L/2 - x$$

$$h = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(L/2 - x)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx + x^2 - x^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot 2 = r \cdot x = x \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx} \quad \therefore x \text{ を微分する}$$

$$S' = (x') \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx} + x (\sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx})'$$

$$= \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx} + x \left(-\frac{L}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx}} \right) = \frac{L(\frac{L}{4} - \frac{3}{2}x)}{\sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx}}$$

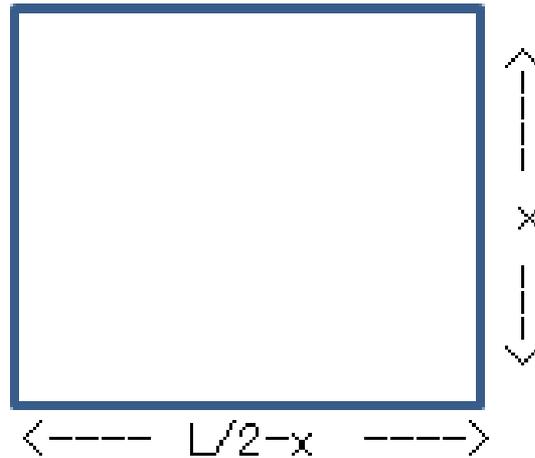
$$\sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx} > 0 \quad \therefore \frac{L}{4} - \frac{3}{2}x = 0 \quad S \text{ が最大}$$

$$\frac{L}{4} = \frac{3}{2}x \quad x = \frac{1}{6}L$$

$$\therefore r = \frac{L}{2} - x = \frac{L}{2} - \frac{1}{6}L = \frac{1}{3}L \quad \leftarrow \text{正三角形}$$

$$S = \frac{1}{6}L \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{1}{6}L^2} = \frac{1}{6}L^2 \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}}$$

2. 長方形の場合：正方形が面積最大、 $S = \frac{L^2}{16}$



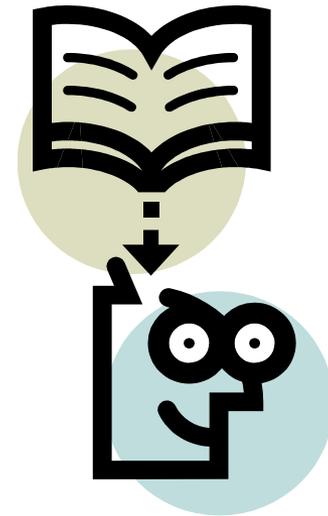
ひもの長さをLとすれば、

$$S = x\left(\frac{L}{2} - x\right) = \frac{1}{2}Lx - x^2$$

これを微分すると $S' = \frac{L}{2} - 2x$

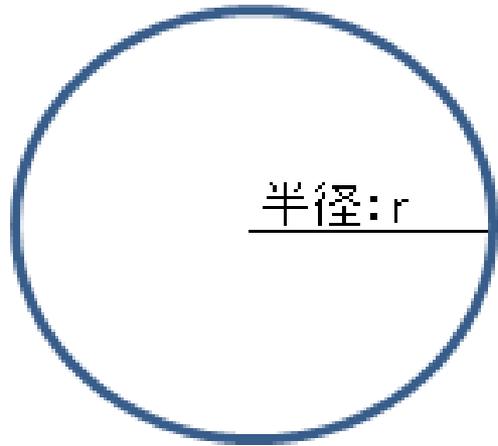
$x = \frac{L}{4}$ 故に正方形が面積最大になる

$$S = \frac{L}{4}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = \frac{L^2}{16}$$



3. 円の場合: $S = \frac{L^2}{4\pi}$

円周: L



$$S = \pi r^2$$

$$L = 2\pi r$$

$$r = \frac{L}{2\pi}$$

$$S = \frac{L^2}{4\pi}$$



4. 評価

図形	最大面積のタイプ	面積	L=1とすると面積は
三角形	正三角形	$S = \frac{L^2}{12\sqrt{3}}$	0.0481
長方形	正方形	$S = \frac{L^2}{16}$	0.0625
円	N/A	$S = \frac{L^2}{4\pi}$	0.0796

①面積が広い順に、
円 > 正方形 > 正三角形
角がとれているほど面積は広くなる

②自然は美しい調和を好む
三角形は正三角形、長方形は正方形